## 2. Überlagerung von Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit

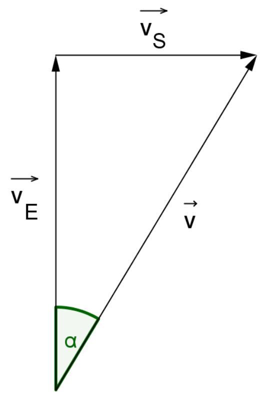
Im Alltag gibt es viele Beispiele der Überlagerung zweier Bewegungen: Ein Fußgänger bewegt sich auf einem Laufband, ein Schwimmer wird durch die Strömung eines Flusses abgetrieben, ein Flugzeug muss dem Seitenwind gegensteuern...

Für die folgenden Situationen wird ein Boot betrachtet, das sich aus eigenem Antrieb mit einer Eigengeschwindigkeit von $v_E = 5{,}0\ \text{ms}^{-1}$ auf einem b = 80 m breiten Fluss bewegt. Dieser hat eine Strömungsgeschwindigkeit $v_S = 4{,}0\ \text{ms}^{-1}$ in die positive x-Richtung. Die Bewegung wird vom Ufer aus betrachtet.

a) $\vec{v}_E$ und $\vec{v}_S$ haben gleiche Richtung und Orientierung
Beide Geschwindigkeiten addieren sich. Vom Ufer aus ergibt sich die Geschwindigkeit: $\boxed{v = v_S + v_E}$

b) $\vec{v}_E$ und $\vec{v}_S$ haben gleiche Richtung aber entgegengesetzte Orientierung
Beide Geschwindigkeiten addieren sich. Vom Ufer aus ergibt sich die Geschwindigkeit: $\boxed{v = v_S - v_E}$

c) $\vec{v}_E$ und $\vec{v}_S$ stehen senkrecht aufeinander: das andere Ufer wird direkt angesteuert.
Aufgrund der Strömung wird das Boot abgetrieben.
Vom Ufer aus betrachtet überlagern sich beide Geschwindigkeiten vektoriell:




$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{v}_S + \vec{v}_E = \begin{pmatrix} v_S \\ v_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}0\ \text{ms}^{-1} \\ 5{,}0\ \text{ms}^{-1} \end{pmatrix}, \text{ wobei z. B } \vec{v}_S = \begin{pmatrix} v_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}0\ \text{ms}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Für die <u>Geschwindigkeit v</u>, mit der sich das Boot <u>vom Startpunkt</u> entfernt, gilt:
$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2} = \sqrt{v_S^2 + v_E^2} = \sqrt{(4{,}0\ \text{ms}^{-1})^2 + (5{,}0\ \text{ms}^{-1})^2} = 6{,}4\ \text{ms}^{-1}$$

- Für den <u>Abdriftwinkel α</u> gilt:
$$\tan(\alpha) = \frac{v_S}{v_E} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_S}{v_E}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4{,}0\ \text{ms}^{-1}}{5{,}0\ \text{ms}^{-1}}\right) = 39°$$

- Die <u>Dauer t der Überquerung</u> ist nur die Eigengeschwindigkeit des Bootes maßgeblich:
$$t = \frac{b}{v_E} = \frac{80\ \text{m}}{5{,}0\ \text{ms}^{-1}} = 16\ \text{s}$$

- Die <u>Abdrift w</u> wird durch die Strömung(sgeschwindigkeit) verursacht:
$w = v_S \cdot t = 4{,}0\text{ms}^{-1} \cdot 16\ \text{s} = 64\ \text{m}$

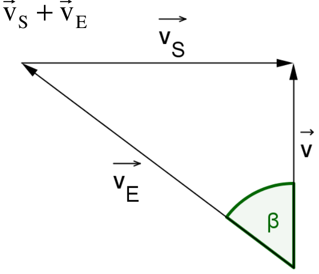
- Die vom Startpunkt aus <u>zurückgelegte Strecke s</u> lässt sich auf zwei Arten berechnen:
$$s = \sqrt{b^2 + w^2} = \sqrt{(80\text{m})^2 + (64\text{m})^2} = 102\text{m}$$
Alternativ: $s = v \cdot t = 6{,}4\ \text{ms}^{-1} \cdot 16\ \text{s} = 102\ \text{m}$

Alle diese Berechnungen lassen sich in einer Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{v} \cdot t \qquad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_S \\ v_E \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} v_S \cdot t \\ v_E \cdot t \end{pmatrix}}$$

Interessiert man sich nur für die Beschreibung der <u>Bahnkurve</u> im Koordinatensystem, und nicht für die Zeitabhängigkeit, dann eleminiert man aus den Koordinatengleichungen die Zeit t.
$x = v_S \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_S}$ in $y = v_E \cdot t$ eingesetzt liefert: $\boxed{y(x) = \frac{v_E}{v_S} \cdot x}$

d) Der Fluss wird ohne Abdrift senkrecht überquert. Aufgrund der Strömung muss gegengesteuert werden. Vom Ufer aus betrachtet überlagern sich beide Geschwindigkeiten vektoriell: $\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{v}_E$
Allerdings ist jetzt die Koordinatendarstellung von $\vec{v}_E$ unbekannt.




- Für den <u>Winkel β</u>, mit dem man <u>gegensteuern</u> muss, gilt:
$$\sin(\beta) = \frac{v_S}{v_E} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{v_S}{v_E}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{4{,}0\,\mathrm{ms}^{-1}}{5{,}0\,\mathrm{ms}^{-1}}\right) = 53°$$

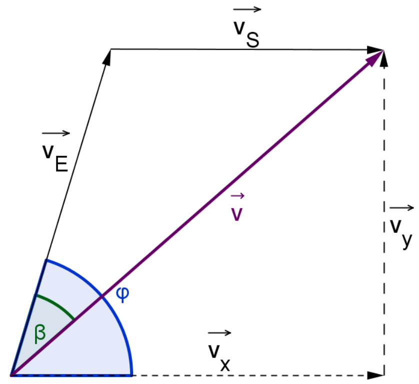
- Für die <u>Geschwindigkeit v</u>, mit der sich das Boot <u>vom Startpunkt</u> entfernt, gilt:
$$v_E^2 = v_S^2 + v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{v_E^2 - v_S^2} = \sqrt{(5{,}0\,\mathrm{ms}^{-1})^2 - (4{,}0\,\mathrm{ms}^{-1})^2} = 3{,}0\,\mathrm{ms}^{-1}$$

- Die <u>Dauer t der Überquerung</u> ist nun die Geschwindigkeit v des Bootes maßgeblich:
$$t = \frac{b}{v} = \frac{80\,\mathrm{m}}{3{,}0\,\mathrm{ms}^{-1}} = 27\,\mathrm{s}$$

Für Interessierte: Wenn $\vec{v}$ schon berechnet ist, folgt:
$$\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{v}_E \Leftrightarrow \vec{v}_E = \vec{v} - \vec{v}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}0\,\mathrm{ms}^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4{,}0\,\mathrm{ms}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}0\,\mathrm{ms}^{-1} \\ 3{,}0\,\mathrm{ms}^{-1} \end{pmatrix}$$

e) Der Kapitän steuert einen beliebigen Winkel φ z.B. bezüglich des Ufers.
Eine <u>Berechnung</u> ist hier <u>nicht verlangt</u>. <u>Alle</u> benötigten Größen können aus der maßstäblichen Zeichnung entnommen werden.
Für die Überquerungsdauer verwendet man die y-Komponente $v_y$ von $\vec{v}$,
für die Abdrift die x-Komponente $v_x$ von $\vec{v}$.

Wer dennoch die Beträge berechnen möchte:
Mit Hilfe des Cosinus-Satzes (M FoSa) berechnet man $|\vec{v}|$.
Mit Sinus und Cosinus des Winkels $\gamma = \varphi - \beta$ erhält man $v_x$ und $v_y$.




**Für alle Fälle c) bis e) verwendet man für die Berechnung**

- der resultierenden Geschwindigkeit $\vec{v}$ bezüglich des Startpunktes $\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{v}_E$
- des Ortes zu einem beliebigen Zeitpunkt $\vec{r}(t) = \vec{v} \cdot t$
- der (schrägen) Entfernung vom Startpunkt $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2}$
- der (horizontalen) Abdrift in x-Richtung die x-Komponente $v_x$ von $\vec{v}$
- der (vertikalen) Überquerung in y-Richtung die y-Komponente $v_y$ von $\vec{v}$